

**Pronóstico tipo de cambio dólar americano-  
peso colombiano usando Regresión Difusa.**

**Exchange Rate forecast using Fuzzy  
Regression**

**Pedro Wilson Paredes-Meriño<sup>1</sup>**  
Universidad Politécnica Estatal del Carchi  
pedroparedes1991@outlook.com

**Yasmany Fernández-Fernández<sup>2</sup>**  
Universidad Politécnica Estatal del Carchi  
yfernandezf@upec.edu.ec

**[doi.org/10.33386/593dp.2025.3.3152](https://doi.org/10.33386/593dp.2025.3.3152)**

V10-N3 (may-jun) 2025, pp 324-339 | Recibido: 09 de marzo del 2025 - Aceptado: 02 de abril del 2025 (2 ronda rev.)

---

<sup>1</sup> Estudiante de la maestría en Estadística Aplicada de la Universidad Politécnica Estatal del Carchi.

<sup>2</sup> ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9530-4028>. Docente investigador en la Universidad Politécnica Estatal de Carchi, Tulcán, Ecuador. Es actualmente doctorando del programa doctoral de excelencia en Ciencias Matemáticas de la Universidad de La Habana, La Habana, Cuba, posee una maestría en Matemática Aplicada y una Ingeniería en Informática ambos títulos obtenidos en la Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba.

Descargar para Mendeley y Zotero

## RESUMEN

El pronóstico del tipo de cambio USD/ COP representa un desafío considerable debido a la complejidad y volatilidad de los mercados financieros. Tradicionalmente, se han utilizado modelos econométricos como ARIMA para predecir estas fluctuaciones, sin embargo, dichos enfoques podrían fallar al no captar la incertidumbre e imprecisión inherentes en los datos financieros. El objetivo principal de este estudio es evaluar la efectividad de la regresión difusa de Tanaka en la predicción del tipo de cambio USD/COP. Para ello, se empleó un enfoque cuantitativo, aplicando dicho modelo sobre datos macroeconómicos trimestrales del período 2008–2024, incluyendo variables como tasa de interés, inflación, PIB, balanza comercial e inversión extranjera entre otras. Los resultados muestran que la regresión difusa de Tanaka generó un valor central de pronóstico de 3986.82 para el primer trimestre de 2024, con un intervalo de incertidumbre entre 653.97 y 7318.67, que contiene el valor real observado de 3857 con un grado de pertenencia 0.961. Al comparar con un modelo SARIMA, cuyo valor fue 4096.69, se concluye que la regresión difusa de Tanaka representa de manera más completa la incertidumbre, ofreciendo un espectro de resultados útil para la toma de decisiones financieras, este enfoque proporciona pronósticos más robustos para entornos financieros volátiles, siendo útil en aplicaciones como la gestión del riesgo y decisiones de inversión y planificación estratégica..

**Palabras claves:** tipo de cambio; regresión difusa; incertidumbre; pronóstico; mercados financieros.

## ABSTRACT

Forecasting the USD/COP exchange rate poses a significant challenge due to the complexity and volatility of financial markets. Traditionally, econometric models such as ARIMA have been used to predict these fluctuations; however, such approaches may fail to capture the uncertainty and imprecision inherent in financial data. The main objective of this study is to evaluate the effectiveness of Tanaka's fuzzy regression in forecasting the USD/COP exchange rate. A quantitative approach was adopted, applying the fuzzy model to quarterly macroeconomic data from 2008 to 2024, including variables such as interest rate, inflation, GDP, trade balance, and foreign direct investment, among others.

The results show that Tanaka's fuzzy regression produced a central forecast value of 3986.82 for the first quarter of 2024, with an uncertainty interval ranging from 653.97 to 7318.67. This interval contains the actual observed value of 3857, with a membership degree of 0.961. Compared to a SARIMA model, which produced a value of 4096.69, the fuzzy regression more comprehensively represents uncertainty, offering a spectrum of possible outcomes that is useful for financial decision-making. This approach provides more robust forecasts in volatile financial environments and can be applied to risk management, investment decisions, and strategic planning.

**Keywords:** exchange rate, fuzzy regression, uncertainty, forecasting, financial markets.

## Introducción

Conocer el tipo de cambio entre el dólar americano (USD) y el peso colombiano (COP) es crucial para las relaciones comerciales y económicas. La volatilidad del mercado cambiario hace que el pronóstico preciso del tipo de cambio sea un desafío significativo. Los modelos de regresión lineal y modelos tradicionales con frecuencia erran en capturar la incertidumbre y la imprecisión inherente en los datos financieros, lo que lleva a pronósticos inexactos. En este contexto, la regresión difusa de Tanaka se presenta como una herramienta eficaz para manejar esta problemática.

La variabilidad y la alta incertidumbre del mercado cambiario dificultan la precisión de los pronósticos del tipo de cambio USD/COP; esta es la principal preocupación que se pretende abordar mediante el uso de la regresión difusa de Tanaka. Los términos de intercambio, los precios del petróleo, los diferenciales de tasas de interés, la inflación, la productividad relativa, la deuda externa y las expectativas del mercado son factores que, por naturaleza, son inciertos y con frecuencia inexactos (Salazar-Díaz, Garavito-Acosta, Restrepo-Ángel, & Arcila-Agudelo, 2023; Clavellina Miller, 2018).

Los modelos de regresión lineal y otros métodos econométricos tradicionales suponen que los vínculos entre las variables y los datos son determinísticos y precisos. Debido a la naturaleza estocástica de los mercados cambiarios, no obstante, esta suposición es poco frecuente en el análisis de series temporales financieras (Candelo & Oviedo, 2024). Estos modelos no manejan adecuadamente la vaguedad y la imprecisión en los datos, lo que resulta en pronósticos que pueden ser inexactos y poco confiables.

Una solución para abordar la incertidumbre y la imprecisión en los datos es la regresión difusa de Tanaka. Los coeficientes del modelo, que son números difusos, capturan mejor la incertidumbre y la variabilidad en las relaciones económicas, ya que ofrecen un rango de valores posibles en lugar de un valor único. Al

utilizar la regresión difusa de Tanaka, se puede obtener un modelo que captura la realidad del mercado cambiario, proporcionando pronósticos más precisos y robustos del tipo de cambio USD/COP.

Se espera que el uso de la regresión difusa de Tanaka en el pronóstico del tipo de cambio USD/COP aumente la precisión de las predicciones, disminuya el riesgo relacionado con la planificación financiera y la inversión y brinde a los encargados de la toma de decisiones en el mercado cambiario una herramienta más sólida. Este método puede brindar pronósticos que sean más resistentes a los cambios y choques económicos inesperados al capturar mejor la variabilidad y la incertidumbre en los datos (Salazar-Díaz et al., 2023).

## Teorías del tipo de cambio

### Teoría de la paridad de poder adquisitivo (PPA)

La Teoría de la Paridad de Poder Adquisitivo (PPA) es un concepto esencial en la economía internacional que explora la relación entre los tipos de cambio y el nivel de precios de los bienes y servicios en diferentes países. La teoría se basa en la premisa de que, a largo plazo, los tipos de cambio entre dos monedas deben ajustarse de manera que el poder adquisitivo de ambas monedas sea igual (Muñoz, 2020).

Esto implica que el precio de una canasta de bienes y servicios debería ser el mismo en distintos países cuando se expresa en una moneda común, tras ajustar por el tipo de cambio. La PPA se fundamenta en la ley del precio único, la cual sostiene que, en mercados sin fricciones ni barreras comerciales, los bienes idénticos deben tener el mismo precio en distintas localizaciones, una vez ajustado por el tipo de cambio. Esta teoría se divide en dos enfoques principales: la PPA absoluta y la PPA relativa (Herzog, 2017).

### Teoría de la paridad de tasas de interés

Paridad de Tasas de Interés Cubierta (PTIC): La PTIC sostiene que el diferencial de tasas de interés entre dos países debe ser igual al

diferencial en el tipo de cambio a futuro. En otras palabras, si un país ofrece una tasa de interés más alta que otro, el tipo de cambio a futuro debe ajustarse para compensar el diferencial en las tasas de interés (Pérez Jurado & Vega, 1993).

### Teoría de la expectativa de tipo de cambio

La Teoría de la Expectativa de Tipo de Cambio se centra en cómo las expectativas de los agentes económicos sobre los futuros movimientos del tipo de cambio influyen en el comportamiento actual del mercado de divisas. Uno de los conceptos clave en esta teoría es el de expectativas racionales, que sugiere que los agentes económicos forman sus expectativas sobre el futuro basándose en toda la información disponible, incluyendo políticas económicas, eventos globales, y datos históricos de los mercados financieros. Estas expectativas, a su vez, influyen en las decisiones de inversión y ahorro, así como en la demanda y oferta de divisas.

En la siguiente tabla se describe algunos de los factores macroeconómicos que pueden influir en la tasa de tipo de cambio.

**Tabla 1**  
*Factores macroeconómicos influyentes*

Factor Macroeconómico	Descripción
Tasas de interés	Las tasas de interés fijadas por la Reserva Federal (EE.UU.) y el Banco de la República (Colombia) determinan el tipo de cambio. Tasas más altas en EE.UU. suelen fortalecer el USD. (León Cristancho, 2015)
Inflación	Una mayor inflación en Colombia respecto a EE.UU. tiende a devaluar el COP frente al USD, ya que el poder adquisitivo de la moneda colombiana disminuye más rápidamente.
Crecimiento económico	Un crecimiento económico más fuerte en EE.UU. puede fortalecer el USD, ya que los inversores buscan beneficiarse de una economía más dinámica en comparación con Colombia (Levy y Bustamante, 2019).
Balanza comercial	Un superávit comercial en Colombia aumenta la demanda de pesos colombianos, lo que puede llevar a la apreciación de la moneda.
Precios de las materias primas	El valor del COP está influenciado por los precios internacionales del petróleo y otras materias primas que exporta Colombia. Precios más altos tienden a fortalecer el COP (Barreto et al., 2021).
Política fiscal y deuda pública	Un déficit fiscal elevado o un aumento en la deuda pública pueden generar incertidumbre y devaluar la moneda local (Daza, 2022).

En esta tabla 2 se describen algunos de los factores macroeconómicos que pueden influir en la tasa de tipo de cambio a nivel nacional.

**Tabla 2**  
*Factores específicos del mercado colombiano*

Factor específico	Descripción
Dependencia de materias primas	Colombia depende de la exportación de petróleo, café y carbón. Las fluctuaciones en los precios internacionales de estas materias influyen directamente en el tipo de cambio (Barreto et al., 2021).
Sector dual de la economía	La coexistencia de un sector moderno en las ciudades y uno rural menos desarrollado afecta la distribución de riqueza, productividad y estabilidad económica (Levy y Bustamante, 2019).
Informalidad laboral	Un alto porcentaje de la población trabaja en el sector informal, limitando la capacidad del gobierno para manejar la política fiscal, lo que genera presiones sobre el tipo de cambio (León Cristancho, 2015).
Precios del petróleo	Los ingresos por exportaciones de petróleo influyen en la fortaleza del peso colombiano. Un aumento en los precios fortalece el COP, mientras que una caída lo debilita (Pesce, 2017).
Política monetaria de EE.UU.	Los cambios en las tasas de interés de la Reserva Federal de EE.UU. impactan los flujos de capital hacia Colombia. Tasas más altas en EE.UU. pueden debilitar el COP (Pérez Jurado & Vega, 1993).

Teoría económica relacionada con el pronóstico del tipo de cambio

**Teoría de la información asimétrica**

La Teoría de la Información Asimétrica, desarrollada por economistas como George Akerlof, Michael Spence y Joseph Stiglitz, describe una situación en la que diferentes agentes en un mercado tienen acceso desigual a la información relevante. Esta desigualdad puede llevar a decisiones subóptimas, afectando la eficiencia del mercado y provocando resultados inesperados. En el contexto del tipo de cambio, la información asimétrica tiene un impacto significativo en la previsión y en la dinámica de las fluctuaciones cambiarias, además de influir en la toma de decisiones por parte de los inversores, bancos centrales y otros actores económicos.

La tabla 3 describe como la información asimétrica puede influir en los mercados financieros.

**Tabla 3**  
*Información asimétrica en los mercados*

Evento	Descripción e impacto
<b>Brexit (2016)</b>	La incertidumbre antes y después del referéndum de 2016 sobre el futuro económico del Reino Unido generó volatilidad en el tipo de cambio de la libra esterlina. Tras el resultado, la libra cayó a su nivel más bajo en 31 años frente al dólar (O'Dubhghaill & Van Kerckhoven, 2021).
<b>Pandemia de COVID-19 (2020)</b>	La falta de información clara sobre la gravedad del virus y las respuestas económicas globales causó una fuerte volatilidad cambiaria. Las monedas emergentes se depreciaron significativamente frente al dólar, considerado refugio seguro (CEPAL, 2020).
<b>Crisis de la lira turca (2018)</b>	La falta de transparencia en la política monetaria y la inestabilidad política llevaron a una crisis de confianza. La lira se depreció más del 30% frente al dólar debido a la incertidumbre de los inversores (CaixaBank Research, 2018).
<b>Crisis del Evergrande (2021)</b>	La crisis de deuda de Evergrande, un desarrollador inmobiliario chino, y la falta de transparencia en el sector provocaron caídas bursátiles y volatilidad en el tipo de cambio del yuan, ante temores de una crisis económica mayor.

La tabla 4 describe como las políticas monetarias y fiscales afectan la determinación del tipo de cambio.

**Tabla 4**  
*Políticas monetarias y fiscales en el tipo de cambio*

Política	Descripción	Efecto en el tipo de cambio
<b>Política monetaria expansiva</b>	Reducción de tasas de interés o inyección de liquidez (compra de bonos). Aumenta la oferta monetaria, lo que puede generar inflación y devaluación de la moneda (Herzog, 2017).	Devalúa la moneda local al reducir su atractivo para inversores extranjeros que buscan mayores rendimientos en otras divisas.
<b>Política monetaria contractiva</b>	Aumento de tasas de interés o reducción de la oferta monetaria. Controla la inflación, fortaleciendo la moneda (Levy y Bustamante, 2019).	Aprecia la moneda local al atraer inversiones extranjeras debido a mayores rendimientos.
<b>Política fiscal expansiva</b>	Aumento del gasto público o reducción de impuestos. Puede estimular la economía, pero incrementar el déficit fiscal (Barreto et al., 2021).	Puede apreciar la moneda si aumenta las tasas de interés, pero un déficit fiscal elevado puede causar depreciación por riesgo.
<b>Política fiscal contractiva</b>	Reducción del gasto público o aumento de impuestos. Tiende a reducir la demanda agregada, afectando negativamente el crecimiento económico (Herrera, 2021).	Puede debilitar la moneda si reduce el crecimiento, pero puede fortalecerla al aumentar la confianza en la estabilidad económica.

Conforme se define el marco de este análisis sobre la predicción del tipo de cambio entre el dólar americano y el peso colombiano, resulta esencial exponer la metodología utilizada para lograr este objetivo global. Para este propósito, se empleará la regresión difusa, un método que facilita el modelado y la predicción de comportamientos en series de tiempo. En la sección subsiguiente, se tratará la descripción matemática de la regresión difusa, resaltando sus bases teóricas y su utilidad para el estudio del tipo de cambio. Luego, se realizará un análisis detallado de las variables implicadas, lo que ofrecerá un marco definido para la interpretación de los resultados logrados. Finalmente, se debatirán los descubrimientos, además de las conclusiones que surgen de esta investigación.

**Metodología**

Enfoque de la investigación: Este estudio utiliza un enfoque cuantitativo, basado en la recopilación y análisis de datos numéricos. Se

emplean técnicas estadísticas y econométricas para examinar las relaciones entre variables y realizar inferencias objetivas. Este enfoque permite medir y explicar fenómenos mediante métodos matemáticos y estadísticos, asegurando precisión en la evaluación de los datos.

**Tipo de investigación:** La investigación es de tipo descriptivo, ya que busca analizar y describir el comportamiento del tipo de cambio USD/COP en su contexto real, sin intervenir en las variables observadas.

**Métodos de investigación:** Se llevó a cabo un análisis predictivo y correlacional utilizando el modelo de regresión difusa de Tanaka. Esta técnica permite representar la incertidumbre de forma explícita, asignando a cada coeficiente un valor difuso que refleja un rango posible en lugar de un valor único.

**Selección de variables:** La selección de variables fue realizada con base en la revisión teórica acerca de las variables relacionadas con el tipo de cambio. La tasa de interés es fundamental, ya que afecta directamente la inversión extranjera y la especulación en los mercados de divisas. Según Mishkin (2008), el precio del crudo Brent es otra variable crítica. Hamilton (2009) sostiene que los precios más altos del petróleo pueden mejorar los términos de intercambio y aumentar la fortaleza de la moneda de un país exportador de petróleo.

Por otro lado, la inflación, el PIB, la balanza comercial, y las reservas internacionales son indicadores macroeconómicos que, las variables como la inversión extranjera directa y el índice bursátil COLCAP también son relevantes, pues reflejan la salud económica y la confianza en el mercado colombiano, lo cual puede influir en la demanda y oferta de divisas. Estas variables fueron seleccionadas no solo por su relevancia teórica, sino también por su disponibilidad de datos y la capacidad de ser modeladas a través de la regresión difusa (Zadeh, 1965).

**Fuente de datos:** Se recopilieron datos trimestrales desde 2008 hasta 2024, provenientes del Departamento Administrativo Nacional

de Estadística de Colombia (DANE). El tipo de cambio USD/COP se utilizó como variable dependiente.

### Modelo de regresión difusa para el pronóstico del tipo de cambio USD/COP

El modelo de regresión difusa diseñado para pronosticar el tipo de cambio entre el dólar americano y el peso colombiano se fundamenta en la integración de técnicas de lógica difusa con métodos estadísticos convencionales.

#### Planteamiento matemático del modelo

La ecuación general de una regresión lineal clásica es:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \epsilon \quad (1)$$

donde:

$y$  es la variable dependiente,

$x_i$  son las variables independientes,

$\beta_0$  es el intercepto,

$\beta_i$  son los coeficientes del modelo,

$\epsilon$  son los coeficientes del modelo.

En la regresión difusa de Tanaka, los coeficientes se consideran números difusos simétricos, representados como:

$$\tilde{\beta}_i = (c_i, d_i)$$

donde:

$c_i$  es el valor central del coeficiente,

$d_i$  es la semianchura del intervalo difuso.

La ecuación del modelo difuso se expresa como:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i x_i \quad (2)$$

lo que se traduce en dos ecuaciones:

Valor central:

$$y_c = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (3)$$

Semianchura del intervalo:

$$y_d = d_0 + \sum_{i=1}^n d_i |x_i| \quad (4)$$

donde:

$y_c$  es el valor central de la salida difusa,

$y_d$  es la semianchura del intervalo de salida.

Este modelo busca minimizar la imprecisión, lo que se formula como un problema de optimización:

$$\min \sum_{i=0}^n d_i$$

sujeto a las restricciones de que los valores predichos deben contener los valores observados en su intervalo difuso:

$$y_i \in [y_c - y_d, y_c + y_d]$$

lo que se expresa como:

$$(y_c - y_d) \leq y_i \leq (y_c + y_d), \forall_i$$

**Función de Pertenencia Triangular en la regresión difusa de Tanaka**

En la regresión difusa de Tanaka, los coeficientes de regresión y la variable de respuesta se representa como números difusos triangulares. Esto significa que cada valor es definido por una función de membresía triangular, que es una función continua y piecewise-lineal utilizada para describir la incertidumbre de los parámetros del modelo.

**Definición de la Función de Pertenencia Triangular**

La función de membresía triangular para un número difuso triangular está definida como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (5)$$

Donde:  
 a es el límite inferior del intervalo de incertidumbres.  
 b es el valor central o el pico de la función triangular (el punto con grado de pertenencia 1).  
 c es el límite superior del intervalo de incertidumbres.

En la regresión difusa de Tanaka, cada coeficiente

$$\tilde{\beta}_i = (c_i - d_i, c_i, c_i + d_i)$$

$$\tilde{y} = (y_c - y_d, y_c, y_c + y_d)$$

Donde:  
 c<sub>i</sub> es el valor central del coeficiente difuso  $\tilde{\beta}_i$ ,  
 d<sub>i</sub> es la semianchura del intervalo de incertidumbres,  
 y<sub>c</sub> es el valor central de la salida difusa  $\tilde{y}$ ,  
 y<sub>d</sub> es la semianchura de la salida difusa.

La función de membresía triangular representa la incertidumbre en la predicción del modelo, gráficamente el valor central tiene grado de membresía 1. Los valores en los extremos y tienen grado de membresía 0 y son los límites de la incertidumbre. La función de membresía decrece linealmente desde hasta los límites.

**Resultados**

**Tratamientos de datos**

El preprocesamiento de datos es fundamental para la aplicación de la regresión difusa de Tanaka, ya que este método se fundamenta en la representación de la incertidumbre a través de números difusos (Tanaka et al, 1982). Diversos estudios han señalado que los modelos de regresión difusa requieren datos estructurados y con características específicas para minimizar el impacto de ruido, valores atípicos y problemas de escalabilidad en la estimación de los parámetros del modelo (Hullermeier, 2005).

**Limpieza de datos**

La existencia de valores irregulares y datos ausentes puede influir en la determinación de los coeficientes del modelo difuso. Así pues, se deben implementar métodos de atribución para los datos ausentes, tales como la interpolación o técnicas basadas en aprendizaje automático (Little & Rubin, 2019).

Para el estudio, no existen datos perdidos y los datos atípicos detectados en el registro histórico corresponden a eventos económicos importantes y no frecuentes como la crisis financiera del 2008 o la pandemia COVID 2020, por este motivo se ha decidido mantener los datos atípicos para el estudio ya que representan eventos y valores reales.

**Multicolinealidad**

Investigaciones anteriores han evidenciado que la alta correlación entre variables puede provocar sobreajustes en los intervalos de predicción difusa (Yu & Lee, 2012). Para evaluar la multicolinealidad entre variables, se utilizó el Factor de Inflación de la Varianza (VIF) y, en caso de ser necesario, emplear métodos como el análisis de componentes principales (PCA) (Akaike, 1974).

En la siguiente tabla se muestra los valores VIF para las variables a utilizar en la regresión difusa.

**Tabla 5**  
*Valores VIF para las Variables*

Tasa de interés	2.16
Crudo Brent	2.26
Inflación	3.18
PIB	11.25
Balanza Comercial	4.9
Reservas Internacionales	10.37
Inversión Extranjera	2.78
COLCAP	7.53

Se decide eliminar las variables Reservas Internacionales y COLCAP para disminuir el valor VIF en las variables restantes.

La tabla 6 muestra los valores VIF de las variables independientes después de eliminar aquellas variables con VIF altos.

**Tabla 6**  
*Valores VIF después de variables eliminadas*

Tasa de interés	1.31
Crudo Brent	2.12
Inflación	2.12
PIB	11.25
Balanza Comercial	2.59
Inversión Extranjera	6.59

**Resumen Descriptivo**

En la tabla 7 se puede observar que el tipo de cambio promedio del peso colombiano frente al dólar estadounidense fue de 2744,3 durante el período analizado (2008-2023). La volatilidad del mercado se evidencia en una desviación estándar significativa de 877,33. El valor mínimo registrado fue de 1767 mientras que el máximo alcanzó los 4847.

**Tabla 7**  
*Resumen descriptivo del Tipo de Cambio*

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Tipo de cambio	64	2774,388	877,3353	1767	4847

Entre 2008 y 2014, el tipo de cambio del peso colombiano frente al dólar se mantuvo relativamente estable como se aprecia en la figura 1.

**Figura 1**  
*Evolución del Tipo de cambio del peso con respecto al dólar*



En la tabla 8 se puede apreciar el resumen descriptivo de la tasa de interés, la cual muestra una media de 0,053 y una desviación estándar de 0,028. En promedio, las tasas de interés trimestrales se han mantenido relativamente

moderadas, lo que sugiere un enfoque de política monetaria que ha intentado equilibrar entre estimular el crecimiento económico y controlar la inflación.

**Tabla 8**

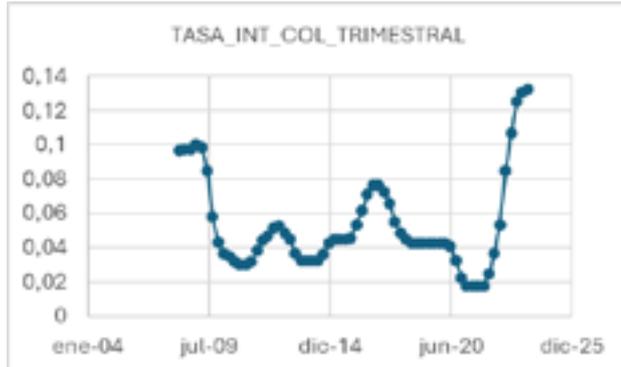
**Resumen descriptivo del Tasa de interés**

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Tasa de Interés Trimestral	64	0,053	0,028	0,018	0,133

La figura 2 ilustra la evolución irregular de la tasa de interés en Colombia. Entre 2008 y 2011, la tasa disminuyó debido a la respuesta del Banco de la República a la crisis financiera global, alcanzando un mínimo de 0.018. De 2011 a 2017, la tasa aumentó por la recuperación económica y el alza en los precios del petróleo, llegando a un máximo de 0.133. Entre 2017 y 2021, volvió a decrecer por la desaceleración económica y la pandemia de COVID-19, alcanzando mínimos históricos. Finalmente, entre 2021 y 2023, la tasa aumentó notablemente por la recuperación post-pandemia y presiones externas, lo que llevó al banco central a endurecer su política monetaria para controlar la inflación.

**Figura 2**

**Evolución de la Tasa de interés**



La tabla 9 analiza el precio del petróleo Brent en pesos colombianos, con un promedio de 213,920.8 pesos. La alta desviación estándar de 81,980.08 pesos refleja la volatilidad del mercado petrolero. El precio mínimo de 110,291.88 pesos se relaciona con la caída de precios entre 2014 y 2016, mientras que el máximo de 479,074.06 pesos puede atribuirse a tensiones geopolíticas.

**Tabla 9**

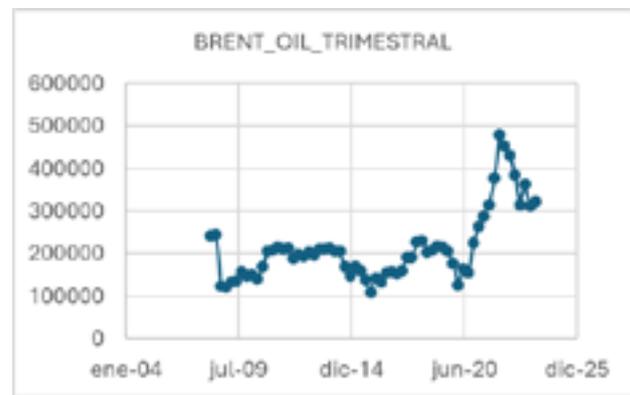
**Resumen descriptivo del precio de petróleo Brent**

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Brent Trimestral	64	213920,8	81980,08	110291,98	479074,06

La figura 3 muestra la evolución del precio del petróleo Brent entre 2008 y 2023. Tras la caída de 2008 por la crisis financiera, los precios se mantuvieron estables, salvo en 2014 y 2023.

**Figura 3**

**Evolución del precio del petróleo Brent**



La Tabla 10 muestra un resumen de la inflación en Colombia con una media de 0,047. La desviación estándar de 0,029 sugiere algunas variaciones importantes, relacionadas con eventos como la crisis financiera, la caída del petróleo y la pandemia. El valor mínimo de 0,016 indica momentos de baja inflación, mientras que el máximo de 0,1329 señala episodios de alta inflación, vinculados a la depreciación del peso tras 2014.

**Tabla 10**

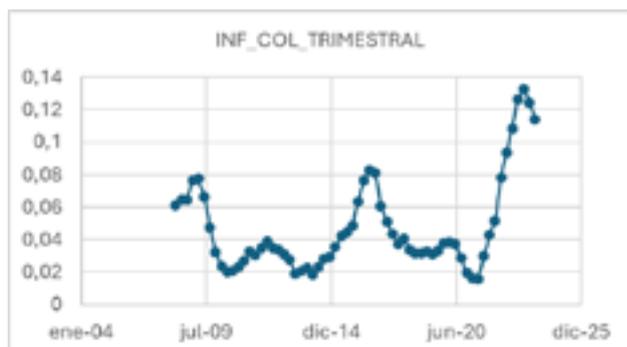
**Resumen descriptivo de la inflación trimestral**

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Inflación Trimestral	64	0,047	0,029	0,016	0,1329

La figura 4 muestra la evolución de la inflación trimestral en Colombia entre 2008 y 2023. De 2008 a 2010, la inflación disminuyó por la crisis financiera y políticas monetarias expansivas. Entre 2010 y 2012, aumentó debido a la recuperación económica y el alza en los precios de materias primas. De 2012 a 2014,

se moderó por la estabilidad del petróleo. Sin embargo, entre 2014 y 2016, la depreciación del peso y la caída de los precios del petróleo la incrementaron. Entre 2016 y 2021, la inflación bajó por la pandemia, pero volvió a subir en 2021 con la recuperación económica.

**Figura 4**  
*Evolución de la inflación trimestral en Colombia*



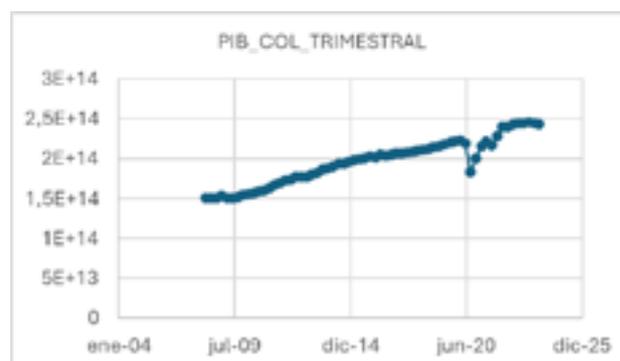
La tabla 11 presenta el análisis del Producto Interno Bruto (PIB) trimestral en Colombia, con un promedio de 1,96E+14 pesos. La desviación estándar de 2,88E+13. El PIB alcanzó un mínimo de 1,50E+14 pesos durante crisis como la financiera de 2008-2009 y la caída del petróleo en 2014-2015. En contraste, el máximo de 2,46E+14 pesos, corresponde a la recuperación económica de 2010-2013 y el periodo post-pandemia de 2021-2022, impulsado por la inversión y la reactivación de sectores clave.

**Tabla 11**  
*Resumen descriptivo del PIB trimestral*

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
PIB Trimestral	64	1.96E+14	2.88E+13	1.50E+14	2.46E+14

La Figura 5 muestra la evolución del PIB de Colombia. De 2008 a 2020, se destaca un crecimiento económico sostenido, impulsado por el auge de materias primas, el consumo interno y la inversión en infraestructura. Este crecimiento fue interrumpido en 2020 por la pandemia de covid-19.

**Figura 5**  
*Evolución del PIB trimestral colombiano*



El análisis en la tabla 12 muestra un déficit promedio de -1,72 billones de pesos en la balanza de pagos de Colombia. La desviación estándar de 2,11 billones indica fluctuaciones significativas, con un mínimo de -6,53 billones durante la caída del crudo en 2014-2015, y un máximo de 1,28 billones en periodos de superávit.

**Tabla 12**  
*Resumen descriptivo de la balanza de pagos*

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Balanza Comercial Trimestral	64	-1,72E+12	2,11E+12	-6,53E+12	1,28E+12

La Figura 6 muestra una tendencia decreciente constante en la balanza de pagos de Colombia. No obstante, entre 2009 y 2013, se observa un breve período de superávit, probablemente debido a la recuperación global tras la crisis de 2008. Después de 2013, la balanza regresa a un déficit sostenido, influenciada por factores externos como la caída del petróleo y la volatilidad global.

**Figura 6**  
*Evolución de la Balanza de Pagos*



La tabla 13 muestra que la Inversión Extranjera Directa (IED) en Colombia tiene una media de 8,81E+12 pesos con una desviación estándar de 4,52E+12 pesos, indicando alta volatilidad. El mínimo de 1,79E+12 pesos, ocurrió durante crisis globales como la de 2008-2009 y la pandemia de COVID-19 en 2020. El máximo de 2,22E+13 pesos, se alcanzó en periodos de crecimiento, como en 2022.

**Tabla 13**

Resumen descriptivo de la Inversión Extranjera Directa (IED)

Variable	Obs	Mean	Std. Dev	Min	Max
Inversión Extranjera Trimestral	64	8,81E+12	4,52E+12	1,79E+12	2,22E+13

La figura 7 muestra una tendencia creciente en la Inversión Extranjera Directa (IED) en Colombia. La IED cayó notablemente en 2009 por la crisis financiera, y volvió a disminuir en 2011 debido a la volatilidad del petróleo y la incertidumbre política. En 2020, la pandemia de COVID-19 provocó otra caída significativa. Sin embargo, a finales de 2022, la IED se recuperó gracias a la reactivación económica post-pandemia y los incentivos gubernamentales.

**Figura 7**

Evolución de la Inversión Extranjera Directa



**Regresión difusa de Tanaka**

La ecuación general de la regresión tiene la siguiente forma:

$$\hat{Y}_c = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \text{tipo\_interés} + \hat{\beta}_2 \text{brent} + \hat{\beta}_3 \text{inflación} + \hat{\beta}_4 \text{PIB} + \hat{\beta}_5 \text{balanza} + \hat{\beta}_6 \text{inversión\_extranjera}$$

y tiene los siguientes coeficientes;

$$\hat{Y}_c = 121.5735 + (5450.384 \text{tipo\_interés}) + (0.0009738195 \text{brent}) + (-1115.566 \text{inflación}) + (0.00000000009130899 \text{PIB}) + (-0.0000000002515309 \text{balanza}) + (-0.00000000001085980 \text{inversión\_extranjera})$$

El valor de producto de la regresión funciona de Ycentral en la regresión difusa de Tanaka. En la siguiente tabla se indica los intervalos de confianza para calcular las semianchuras.

En la tabla 14 se visualiza los intervalos de confianza para cada variable

**Tabla 14**

Intervalo de confianza de variables a usar

	2.5%	97.5%
Intercepto	-1196.109	1439.256
Tasa de Interés	-3508.33	14409.10
Brent	-0.0007703363	0.002717975
Inflación	-12873.42	10642.29
PIB	0.00000000000274475	0.00000000001798732
Balanza Comercial	-0.0000000003536647	-0.0000000001493971
Inversión Extranjera	-0.00000000004652932	0.00000000004435736

La incertidumbre se calcula:

$$\alpha_j^s = \frac{b_j^{sup} - b_j^{inf}}{2} \tag{6}$$

Donde:

$b_j^{sup}$  es el intervalo de confianza superior,  
 $b_j^{inf}$  es el intervalo de confianza inferior,  
 $\alpha_j^s$  la incertidumbre.

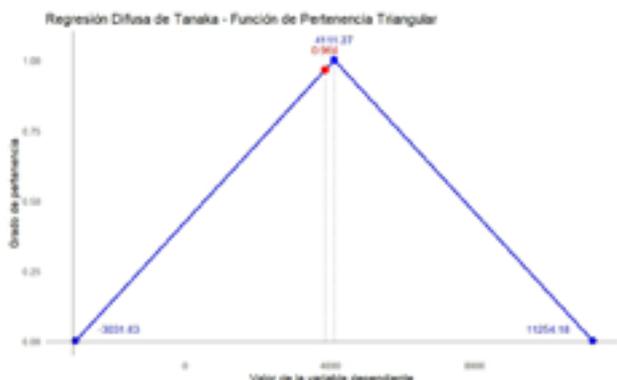
Los valores de la semianchura son dados por la regresión lineal, sustituyendo los coeficientes por los valores de la incertidumbre:

$$Y^s = 1317.682 + (8958.715 \text{tipo\_interés}) + (0.001744156 \text{brent}) + (11757.85 \text{inflación}) + (0.00000000008856423 \text{PIB}) + (0.0000000001021338 \text{balanza}) + (0.00000000004544334 \text{inversión\_extranjera})$$

$$Y^s = 7142.905$$

En la figura 8 se representa la función de pertenencia triangular con los valores obtenidos de la regresión difusa de Tanaka.

**Figura 8**  
*Función de pertenencia triangular*



La función de pertenencia triangular es constituida por el valor central que tiene un grado de pertenencia 1, límite superior e inferior que tienen un grado de pertenencia 0. El uso del modelo de regresión difusa de Tanaka para predecir el tipo de cambio USD/COP resultó en una ecuación con un valor central de 4111.275, junto con un intervalo de incertidumbre caracterizado por un límite inferior de -3031.629 y un límite superior de 11254.18.

El resultado de la regresión difusa de Tanaka no es un único valor, sino un rango borroso, lo que implica que el valor verdadero de Y se halla dentro de ese espectro con un cierto nivel de incertidumbre, mientras más lejos este un valor a el valor central, menor será su pertenencia a la predicción del modelo.

Para medir la eficacia predictiva del modelo, se contrastó la proyección con el valor real del tipo de cambio USD/COP para el primer trimestre de 2024, que alcanzó los 3857, este valor está en el margen de predicción del modelo y muestra un grado de pertenencia de 0.964, lo que señala un elevado grado de compatibilidad con la predicción difusa generada. Un nivel de pertenencia que se aproxima a 1 indica que la observación real está dentro del rango de confianza del modelo y que la estimación es apropiada en el contexto de la teoría de conjuntos difusos, el nivel de pertenencia se obtiene como:

$$\mu(Y) = \frac{Y - Y_{inferior}}{Y_{central} - Y_{inferior}} \tag{7}$$

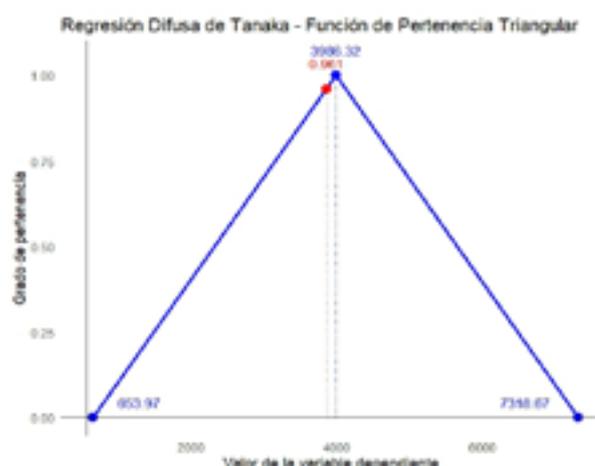
sin embargo, un tipo de cambio negativo como lo es el límite inferior no tiene sentido económico al menos que sea un caso único de especulación o vencimiento de los contratos de futuros como lo que pasó el 21 de abril del 2020, donde el precio del crudo WTI cerró con valores negativos de \$-37.63.

El modelo abarca una gran incertidumbre posiblemente debido a la reducción de variables explicativas después del análisis VIF, también a la variabilidad en los datos económicos y datos atípicos que corresponden a eventos económicos importantes como las crisis financieras del 2008 y COVID.

**Modelo sin tratamiento de datos**

En la figura 9 se presenta el modelo final de la regresión difusa de Tanaka utilizando todas las variables seleccionadas bibliográficamente, el incremento de variables reduce la incertidumbre del modelo, teniendo como resultado un modelo más confiable para la toma de decisiones.

**Figura 9**  
*Función de pertenencia triangular sin tratamiento de datos*



Este modelo no contempló un estudio VIF o cualquier otro tipo de preprocesamiento de datos previo a la estimación de los coeficientes difusos. No obstante, los resultados indican un margen de incertidumbre considerablemente

más reducido en comparación con el modelo previo. Además, en esta situación, los límites del intervalo son positivos, lo que asegura que todas las proyecciones sean comprensibles económicamente.

El porcentaje de pertenencia del valor real en el modelo es de 0.961, lo que indica que el preprocesamiento de los datos en esta situación no incrementó la estabilidad del modelo, sino que incrementó la variabilidad en la predicción probablemente por la eliminación de variables.

Modelo SARIMA para el pronóstico del tipo de cambio y la comparación entre modelos

Para corroborar la solidez del modelo de regresión difusa, se contrastó su rendimiento con un modelo SARIMA (Average Moving Average Seasonal AutoRegressive), frecuentemente empleado en el estudio de series de tiempo financieras. El modelo SARIMA se ajustó a partir de la serie histórica del tipo de cambio USD/COP, teniendo en cuenta la estacionalidad y la diferenciación de acuerdo a los criterios de Box-Jenkins. El modelo seleccionado se fundamentó en el estudio del AIC (Criterio de Información de Akaike) y el PACF/ACF.

La siguiente tabla recopila los resultados obtenidos en el pronóstico del tipo de cambio empleando los diferentes modelos predictivos.

**Tabla 15**  
*Pronóstico del tipo de cambio: Regresión difusa y modelo SARIMA*

modelo	Valor real	Valor predicho
Regresión difusa- tratamiento de datos	3945.89	4111.27
Regresión difusa- sin tratamiento de datos	3945.89	3986.32
SARIMA	3945.89	4096.69

El modelo SARIMA proyecta un valor específico sin tener en cuenta un intervalo de incertidumbre, lo que restringe su habilidad para reflejar de manera apropiada la inestabilidad del mercado de divisas. A pesar de que el valor proyectado fue de 4096.69, bastante próximo al real, no incluye un intervalo de confianza

específico, lo que representa una restricción ante sucesos atípicos o extremos. El intervalo amplio que mostró la regresión difusa con tratamiento previo incluyó valores negativos, lo que disminuye la interpretación económica del resultado. No obstante, el valor central (4111.27) se aproximaba al observado, mostrando un elevado grado de pertenencia (0.964).

La regresión difusa sin intervención anterior, que mantuvo todas las variables explicativas, consiguió una estabilidad y coherencia económica superiores en los intervalos, con un valor central de 3986.32 y un grado de pertenencia de 0.961. Este modelo presentó el valor más próximo al real y un intervalo positivo, lo que lo sitúa como el más robusto en términos de interpretación.

**Conclusión**

El presente estudio demuestra que la regresión difusa de Tanaka constituye una alternativa eficaz y robusta para la predicción del tipo de cambio USD/COP en contextos caracterizados por alta volatilidad e incertidumbre, típicos de los mercados financieros emergentes. A través de la comparación entre dos modelos de regresión difusa —uno con tratamiento de datos mediante VIF y otro sin eliminación de variables—, se evidenció que ambos lograron contener el valor real observado dentro de sus respectivos intervalos de predicción, con elevados grados de pertenencia (0.964 y 0.961).

El modelo sin tratamiento previo mostró ventajas adicionales: no solo presentó el valor central más cercano al real (3986.32 vs. 3945.89), sino que también generó un intervalo positivo y más estrecho, mejorando la interpretabilidad económica y reduciendo la incertidumbre. Esto valida lo propuesto por Donoso (2006) y De-los-Cobos et al. (2011), quienes afirman que conservar la estructura completa del sistema explicativo, aún en presencia de colinealidad, puede enriquecer la calidad predictiva y la coherencia del modelo difuso.

La comparación con un modelo tradicional como SARIMA reveló que, aunque

este último entregó una predicción puntual cercana (4096.69), carece de la capacidad para representar incertidumbre estructural, una limitación significativa en entornos donde la toma de decisiones debe considerar escenarios de riesgo. Esta diferencia resalta la utilidad práctica del enfoque difuso, ya que permite al analista anticipar no solo un valor esperado, sino también un rango razonable dentro del cual puede fluctuar el tipo de cambio.

Desde una perspectiva aplicada, la regresión difusa de Tanaka ofrece un valor considerable para entidades financieras, importadores/exportadores, formuladores de políticas públicas y analistas de riesgo, al proporcionar una herramienta de pronóstico que integra tanto la incertidumbre inherente como la lógica de decisión bajo ambigüedad. Esto ha sido respaldado en la literatura por trabajos como los de Malyarets et al. (2018) y Karami et al. (2024), que destacan su aplicabilidad en sectores como banca, inversión y mercados energéticos.

No obstante, también se identificaron limitaciones que deben ser consideradas: dificultades para interpretar los coeficientes bajo enfoques econométricos clásicos, la falta de software especializado y la sensibilidad a problemas como la multicolinealidad o la presencia de valores extremos. En consecuencia, se recomienda que futuras investigaciones exploren métodos híbridos —como fuzzy-GARCH o fuzzy-neural—, o técnicas alternativas para selección de variables que mantengan la interpretabilidad económica sin sacrificar precisión predictiva.

Los resultados empíricos respaldan el uso de la regresión difusa como un modelo poderoso para entornos donde el riesgo y la incertidumbre son parte integral del proceso de decisión. Su implementación puede fortalecer los mecanismos de planeación financiera y contribuir a una comprensión más profunda de los determinantes del tipo de cambio en economías emergentes como la colombiana.

## Discusión

Los hallazgos de esta investigación evidencian que la regresión difusa de Tanaka resulta un instrumento efectivo para ilustrar la incertidumbre en la predicción del tipo de cambio USD/COP. Se consiguió obtener valores centrales de 4111.27 y 3986.32, respectivamente, en comparación con un valor real observado de 3945.89. Los dos modelos incorporaron al valor real en el intervalo de predicción, mostrando altos grados de pertenencia (0.964 y 0.961), lo que indica una gran correlación entre los modelos y los datos observados.

Al contrastar estos descubrimientos con un modelo SARIMA convencional, que presentó un valor puntual de 4096.69, se demuestra que, aunque SARIMA puede proporcionar una precisión puntual alta, no simboliza de manera explícita la incertidumbre, lo que representa una restricción significativa en entornos financieros fluctuantes. Esta discrepancia concuerda con lo indicado por Shapiro (2005) y Kahraman et al. (2006), quienes subrayan que la regresión difusa no solo facilita la modelación de relaciones dudosas entre variables, sino que también ofrece un intervalo de predicción adaptable que optimiza la interpretación en situaciones de incertidumbre.

Igualmente, Karami et al. (2024) evidencian que los modelos híbridos como el de fuzzy-GARCH también capturan de manera efectiva la incertidumbre, aunque demandan una gran potencia computacional y una mayor complejidad en su implementación. En contraste, el enfoque difuso empleado en esta investigación constituye una respuesta más simple y clara, especialmente beneficiosa cuando los datos existentes son escasos o incompletos.

El modelo que no elimina variables por VIF evidenció el mejor ajuste al valor real, un intervalo más estrecho y totalmente positivo, lo que proporciona mayor consistencia económica. Este descubrimiento concuerda con Donoso (2006), que propone que mantener variables significativas, incluso en caso de colinealidad, puede potenciar la calidad de interpretación

de los modelos difusos. Adicionalmente, en investigaciones como las realizadas por De-los-Cobos et al. (2011) y Malyarets et al. (2018), también se nota que la regresión difusa brinda beneficios en comparación con los métodos tradicionales, en particular cuando se manejan datos de naturaleza macroeconómica o financiera.

Desde el punto de vista de la aplicabilidad, los resultados obtenidos refuerzan el uso de la regresión difusa en escenarios reales como:

Empresas importadoras/exportadoras, que deben anticipar variaciones cambiarias,

Bancos y entidades financieras, que evalúan el riesgo en operaciones internacionales,

Analistas macroeconómicos, que necesitan modelos robustos bajo condiciones de incertidumbre,

Formulación de políticas públicas, donde se evalúa el impacto de variables económicas clave.

Sin embargo, como también se reporta en los trabajos de Caycedo & Rondón (2017) y Gutiérrez & Ferreira (2020), el enfoque difuso no está exento de limitaciones. Entre las principales se encuentran:

Dificultad para interpretar los coeficientes difusos bajo enfoques econométricos tradicionales,

Escasa disponibilidad de paquetes estadísticos robustos para automatizar este tipo de análisis,

Posible sobreestimación de la incertidumbre si no se trata correctamente la multicolinealidad o se usan datos atípicos.

## Referencias Bibliográficas

Barreto, I. M. O., Reyes, G. E., Martin-Fiorino, V., & Villalobos-Antúnez, J. V. (2021). Crisis empresarial, factores que influyen y alteran la gestión de las empresas en Colombia. *Revista de Ciencias Sociales*

- (Ve), 27(4), 93–110. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=28069360008>
- Levy, N., & Bustamante, J. (2019). Política monetaria y crecimiento económico: ¿qué pueden hacer los bancos centrales? *Economía UNAM*, 16(48), 146–167. <https://doi.org/10.22201/fe.01851667p.2019.48.625>
- Caycedo, E. P., & Rondón, N. (2017). Estimación de parámetros para un modelo de regresión difusa simple. Universidad del Tolima.
- Çetitiv, B. (2012). Fuzzy linear regression. Dokuz Eylül University, Graduate School of Natural and Applied Sciences.
- Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). (2020). Conceptos de las paridades de poder adquisitivo. Programa de Comparación Internacional en América Latina y el Caribe. [https://www.cepal.org/sites/default/files/project/files/pci-conceptos-paridades-poder-adquisitivo\\_0.pdf](https://www.cepal.org/sites/default/files/project/files/pci-conceptos-paridades-poder-adquisitivo_0.pdf)
- Daza, A. S. (2022). Información asimétrica y mercados financieros emergentes: el análisis de Mishkin. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/413/41303402.pdf>
- De-los-Cobos, S. G., Goddard, J., & Gutiérrez, M. A. (2011). Regresión borrosa vs. regresión por mínimos cuadrados ordinarios: Caso de estudio. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 18(1), 33-48.
- Donoso Salgado, S. (2006). Análisis de regresión difusa: Nuevos enfoques y aplicaciones. Universidad de Granada.
- CaixaBank Research. (2018, octubre 17). Crisis financiera turca: en tiempo de descuento. Focus. <https://www.caixabankresearch.com>
- Gutiérrez, A., & Ferreira, W. (2020). Un modelo de regresión lineal aplicando lógica difusa. *Revista Sextante*, 23, 48-54.
- Hamilton, J. D. (2009). Causes and consequences of the oil shock of 2007–08 (NBER Working Paper No. 15002). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w15002>

- Herrera, O. M. (2021). La paridad del poder adquisitivo: nueva evidencia para Colombia y Latinoamérica.
- Herzog, J. O. (2017). Fundamentos del tipo de cambio Inicio de una serie sobre tipos de cambio de equilibrio. Obtenido de [https://www.bbva.com/wp-content/uploads/mult/120221\\_EconomicWatchEEEU\\_149\\_esp\\_tcm346-287981.pdf](https://www.bbva.com/wp-content/uploads/mult/120221_EconomicWatchEEEU_149_esp_tcm346-287981.pdf)
- Pérez Jurado, M., & Vega, J. L. (1993). Paridad del poder de compra: un análisis empírico (Documento de Trabajo No. 9322). Banco de España.
- Karami, M., Shabanlou, S., Mazaheri, H., Mokhtari, S., & Najarchi, M. (2024). Integration of the non-linear time series GARCH model with fuzzy model optimized with water cycle algorithm for river streamflow forecasting. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 17, 156. <https://doi.org/10.1007/s44196-024-00570-0>
- Kahraman, C., Bekese, A., & Bozbura, F. T. (2006). Fuzzy regression approaches and applications in Fuzzy Multi-Criteria Decision Making (pp. 589–615). Springer.
- O'Dubhghaill, S., & Van Kerckhoven, S. (2021). Brexit, Englixit? Disintegration and how taking back control means giving up control. *Comentario Internacional*, 21, 99–112. <https://doi.org/10.32719/26312549.2021.21.5>
- León Cristancho, S. J. (2015). Factores macroeconómicos que influyen en la volatilidad del índice accionario COLCAP [Trabajo de grado, Universidad EAFIT]. Repositorio Institucional EAFIT.
- Malyarets, L., Dorokhov, O., & Dorokhova, L. (2018). Method of constructing the fuzzy regression model of bank competitiveness. *Journal of Central Banking Theory and Practice*, 2, 139–164.
- Mishkin, F. S. (2008). Moneda, banca y mercados financieros (8ª ed.). Pearson Educación.
- Muñoz, V. S. (2020). Teoría de la Paridad de Poder Adquisitivo (PPA): Aportes de Gustav Cassel sobre el tipo de cambio de equilibrio. Obtenido de [https://www.redalyc.org/journal/290/29065286034/html/#:~:text=Seg%C3%BAn%20Dornbusch%20\(1985\)%20la,precios%20relativos%20a%20los%20pa%C3%ADses.](https://www.redalyc.org/journal/290/29065286034/html/#:~:text=Seg%C3%BAn%20Dornbusch%20(1985)%20la,precios%20relativos%20a%20los%20pa%C3%ADses.)
- Pesce, G. (2017). Finanzas internacionales: ¿Qué son las paridades y para qué se utilizan? *Revista CEA, Centro de Estudios de Administración*, 46–66.
- Shapiro, A. F. (2005). Fuzzy regression models. Penn State University, Smeal College of Business.
- Tanaka, H., & Lee, H. (1982). Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(1), 95-106.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)